Mathe für Wirtschaftsinformatiker 13.11.13

Variation mit Wiederholung

↑

Berücksichtigung der Reihenfolge

 ← anders als ••

$$V_w = n^m$$

BSP: $\underbrace{0\ 1\ 2\ 3}_{n=4}$ → Wie viele verschiedene Zahlen können aus den Ziffern gebildet werden?

Wie viele Stellen soll die Zahl haben

m = 1 • $4^1 = 1$

m = 2 • • $4^2 = 16$

m = 3 • • • $4^3 = 64$ $= 1 + 16 + 64 + 256 = 337$ L

m = 4 • • • • $4^4 = 256$

Kombination Ziehung von m Kugeln oder Elementen aus n
keine Berücksichtigung der Reihenfolge bei der Ziehung ohne Wiederholung

n - Elemente in der Menge

m - werden gezogen

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}$$ Binomialkoeffizient

Permutation mit Wiederholung $= \binom{n}{m}$, wenn 2 Gruppen vorliegen: m und $n-m$

Beispiel Lottospiel

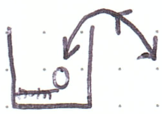
Eine Ziehung von 6 aus 49 Kugeln.
Reihenfolge der Ziehung ohne Bedeutung.
Wiederholung liegt nicht vor.

$n = 49 \quad m = 6$

Taschenrechner 49 nCr 6

$$\frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Kombination mit Wiederholung



m - Kugeln
$m-1$ Wiederholungen

$n+m-1$

↓ Ziehung ohne Zurücklegen, weil die $m-1$ Wiederholungen als zusätzliche Elemente in die Urne kommen.

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n+\cancel{m}-1-\cancel{m})!} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

Beispiel lotto mit zurücklegen

49 Kugeln

$m = 6$ Kugeln werden gezogen

$m - 1 = 5$ Wiederholungen

$n + m - 1 = 49 + 6 - 1 = 54$

Taschenrechner 54nCr6

$$\binom{54}{6} = \frac{54!}{6!\ 48!} = 25827165$$

Beispiel: Zwei Würfel → 1...6 und 1...6

(1,1) Wiederholung mit, ohne

(1,2)(2,1) Reihenfolge mit, ohne

$$\begin{array}{cccc} 1,1 & 1,2 & \cdots & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,6 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,6 \end{array}$$

→ $36 = 6 \cdot 6$ 1

$36 - 6 = 30$ 2

$30 - 15 = 15$ 3

$15 + 6 = 21$ 4

1 $mRmW: V_W(6,2) = 6^2 = 36$

2 $mRoW: V(6,2 = \frac{6!}{4!} = 30$

3. oR, oW: $C(6,2) = \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2\ \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 15$

4. oR, mW: $C_w(6,2) = \frac{(6+2-1)!}{2!\ 5!} = \frac{7!}{2!\ 5!} = \frac{\cancel{1\,2\,3\,4\,5}\,6\,7}{1 \cdot 2\ \cancel{1\,2\,3\,4\,5}} = \frac{42}{2} =$

21

Beispiel Lottospiel 6 Richtige : $1 = \binom{6}{6} = \frac{6!}{6!\ \underbrace{0!}_{=1}} = 1$

5 Richtige $\binom{6}{5} \cdot \binom{49-6}{\underbrace{6-5}_{=1}} = \frac{6!}{5!\ 1!} \cdot \frac{43!}{1!\ 42!} =$

$\frac{720}{120 \cdot 1} \cdot 43 = 258$

4 Richtige $\binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{\underbrace{6-4}_{=2}} = 15 \cdot 903 = 13545$

Wahrscheinlichkeit

Pr(4 Richtige) $\frac{13545}{13983816}$

Bsp Passwort besteht aus

2 Buchstaben groß, klein, keine Wiederholung
4 Ziffern, mit Wiederholung

Wie viele Passwörter können erzeugt werden?

$2 \cdot 26 = 52$ Buchstaben

Reihenfolge ist von Bedeutung!
Variation ohne Wiederholung, $V(52,2) = \frac{52!}{(52-2)!}$

$= 51 \cdot 52$

$= 2652$

Ausrechnung der 2 Buchstaben im PW.
Keine Reihenfolge, denn die Buchstabenpärchen berücksichtigen schon die Reihenfolge

$$C(6,2) = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \quad \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 15$$

Insgesamt $V(52,2)$ Buchstabenpaare UND $C(6,2)$ verschiedener Anordnungen auf 6 Positionen der PW.

$\Rightarrow C(6,2) \cdot V(52,2) = 2652 \cdot 15 = 39\,780$ verschiedenen Buchstabenpaare können im PW mit 6 Positionen untergebracht werden.

Ziffern 10 Ziffern, 4 Positionen

Reihenfolge

Ziffern dürfen wiederholt auftreten

$\longrightarrow V_W(10,4) = 10^4$

Das Passwort kann somit mit $2652 \cdot 15 \cdot 10^4$ verschiedenen Arten zusammengesetzt werden.

Sprich mit 397800.000 versch. Passwörte