

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsexperiment

X - Zufallsvariable
diskrete

x - Ausprägungen / Realisationen

Würfel $X = 1, 2, 3, \dots, 3, 4, 5, \dots$
 $\downarrow$
x

Ω Grundgesamtheit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wahrscheinlichkeit

$Pr(X=x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \# \text{ günstige / mögliche Elemente} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(X=6)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \\ \text{Laplace} \end{array} \right.$$

Variante 2

$$Pr(X=x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), f(x) = \frac{n(x)}{n} \quad \text{von Mises}$$

Variante 3

$$\frac{Pr(x)}{Pr(\bar{x})} = \frac{a}{b} \quad \text{subjektive Wahrscheinlichkeit}$$

$$3) \quad Pr(x) = 1 - Pr(\bar{x}) \quad Pr(x) + Pr(\bar{x}) = 1$$

a = Ereignisse für eine 6 $\rightarrow a=1$
b " keine 6 $\rightarrow b=5$ } Einschätzung

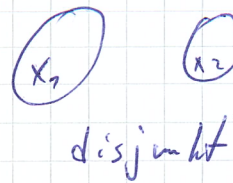
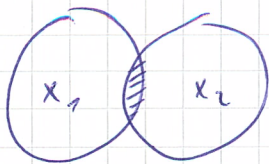
$$\frac{Pr(x=6)}{Pr(\bar{x}=6)} = \frac{1}{5} \Rightarrow Pr(x=6) = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

Kolmogorov - Axiome (Spielregel) Zeitgenosse Mises'

1) $Pr(x) \geq 0$

2) $Pr(\Omega) = 1$

3) x_1 und x_2 sind disjunkte Ereignisse, dann gilt $Pr(x_1) + Pr(x_2) = Pr(x_1 \cup x_2)$



x_1 und x_2 sind nicht disjunkt

Beispiel

R = rote Kugeln

G = grüne Kugel

$$n(R) = 40$$

$$n(G) = 80$$

$$n = 200$$

$$P_r(R) = \frac{n(R)}{n} = \frac{40}{200}$$

$$P_r(R) = \frac{n(R)}{n} = \frac{80}{200}$$

$$P_r(G \cup R) = \frac{40}{200} + \frac{80}{200} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$

disjunkt

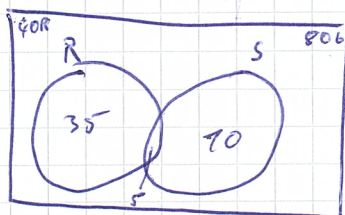
5 rote Kugeln besitzen einen Stern als zusätzliche Kennzeichnung

75 Kugeln mit Stern

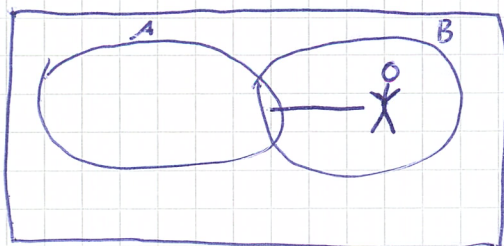
$$P_r(S) = \frac{15}{200}$$

$$P_r(R \cap S) = \frac{5}{200}$$

$$P_x(R \cup S) = P_r(R) + P_r(S) - P_r(R \cap S) = \frac{40}{200} + \frac{15}{200} - \frac{5}{200} = \frac{1}{4}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeit



$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

$$M = \{x \mid x > 2\}$$

$$Pr(5|R) = \frac{15}{40} = \frac{15/200}{40/200} = \frac{3}{8}$$

Beispiel

B^* - blaue Autos

B - blau gesehenes Auto

G^* - grüne Autos

g - grün gesehen

$$n(B^*) = 5 \quad n(G^*) = 25 \quad n = 30$$

$$80\% = Pr(B|B^*)$$

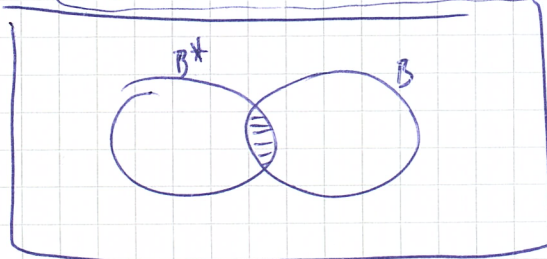
$$= \frac{Pr(B^* \cap B)}{Pr(B^*)}$$

$$Pr(B^*|B) = ?$$

$$= \frac{Pr(B^* \cap B)}{Pr(B)}$$

$$= \frac{\overbrace{Pr(B|B^*)}^{80\%} \cdot \overbrace{Pr(B^*)}^{5/30}}{\underbrace{Pr(B|B^*)}_{80\%} \cdot \underbrace{Pr(B^*)}_{5/30} + \underbrace{Pr(B|\bar{B}^*)}_{20\%} \cdot \underbrace{Pr(\bar{B}^*)}_{25/30}}$$

$$Pr(B) = \underbrace{Pr(B|B^*) \cdot Pr(B^*) + Pr(B|\bar{B}^*) \cdot Pr(\bar{B}^*)}_{\text{Total Probability}}$$



$$B = B \cap B^* \cup \bar{B}^* \cap B$$

$$Pr(B) = Pr(B \cap B^*) + Pr(B \cap \bar{B}^*)$$

3. Axiom

$$Pr(B|\bar{B}^*) = \frac{Pr(B \cap \bar{B}^*)}{Pr(\bar{B}^*)} \rightarrow Pr(B|B^*) \cdot Pr(B^*)$$